BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

Session 2017

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

Matériel autorisé :
-toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, sous réserve que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante
(Circulaire n° 99 – 186 du 16/11/1999).

Tout autre matériel est interdit.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

EXERCICE 1 (10 points)

Une usine fabrique des montures de lunettes en acétate.
Lors d'une étape de la fabrication, les montures sont chauffées à 75 °C pour prendre la forme voulue puis on les laisse refroidir à l'air ambiant.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la température de la monture en acétate en fonction du temps lors du refroidissement.

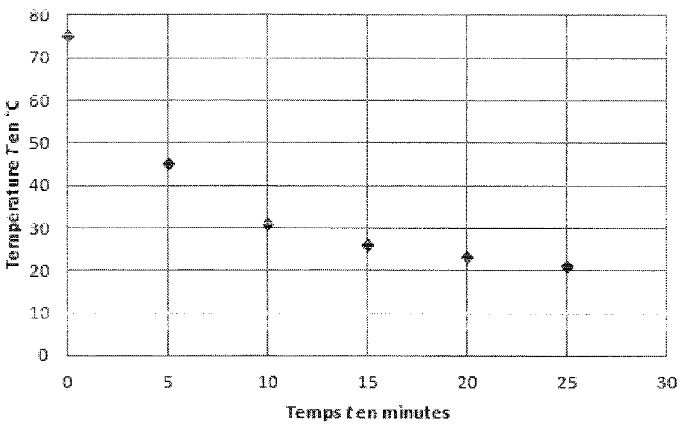
Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Étude expérimentale du refroidissement

Lors du refroidissement, on a mesuré la température des montures toutes les 5 minutes pendant 25 minutes. On a obtenu le tableau suivant :

Temps t (minutes)	0	5	10	15	20	25
Température des montures T (degrés Celsius)	75	45	31	26	23	21

Représentation de la série (t, T) :



Le coefficient de corrélation linéaire de la série (t, T) est $r_1 \approx -0,886$.

L'allure de la série conduit à procéder à un changement de variable, en posant :

$$z = \ln(T - 20).$$

On obtient le tableau de valeurs suivant (les résultats ont été arrondis à 10^{-3}).

Temps t (minutes)	0	5	10	15	20	25
$z = \ln(T - 20)$	4,007	3,219	2,398	1,792	1,099	0

1° Le coefficient de corrélation linéaire de cette nouvelle série (t, z) est $r_2 \approx -0,997$.
Expliquer pourquoi le changement de variable est pertinent.

2° Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de z en t selon la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = at + b$, où a et b sont arrondis au centième.

3° En déduire une expression de T en fonction de t de la forme $T = 20 + C_0\,e^{at}$, où C_0 est à arrondir à l'unité.

B. Étude théorique du refroidissement à l'aide d'une équation différentielle

La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi : « la vitesse de refroidissement d'un corps chaud inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant ».

Dans un atelier de l'usine où la température ambiante est 20 °C, on admet qu'en appliquant la loi de Newton, la fonction correspondant à la température (en °C) de la monture en acétate en fonction du temps t (en min) vérifie l'équation différentielle (E) :

$$y' = -0{,}15\,(y - 20),$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1° Montrer que l'équation (E) s'écrit aussi :

$$y' + 0{,}15\,y = 3.$$

2° Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + 0{,}15\,y = 0.$$

On fournit la formule suivante.

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$a\,y' + b\,y = 0$	$f(t) = k\,e^{-\frac{b}{a}t}$

3° Déterminer le nombre réel c tel que la fonction constante g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = c$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

4° En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

5° Dans un atelier de l'usine où la température ambiante est 20 °C, une monture en acétate est chauffée à 75 °C. À l'instant $t = 0$, elle est sortie du four et laissée à l'air ambiant pour refroidir.
Déterminer, dans ce cas, la fonction f donnant la température (en °C) de la monture en fonction du temps t (en min).

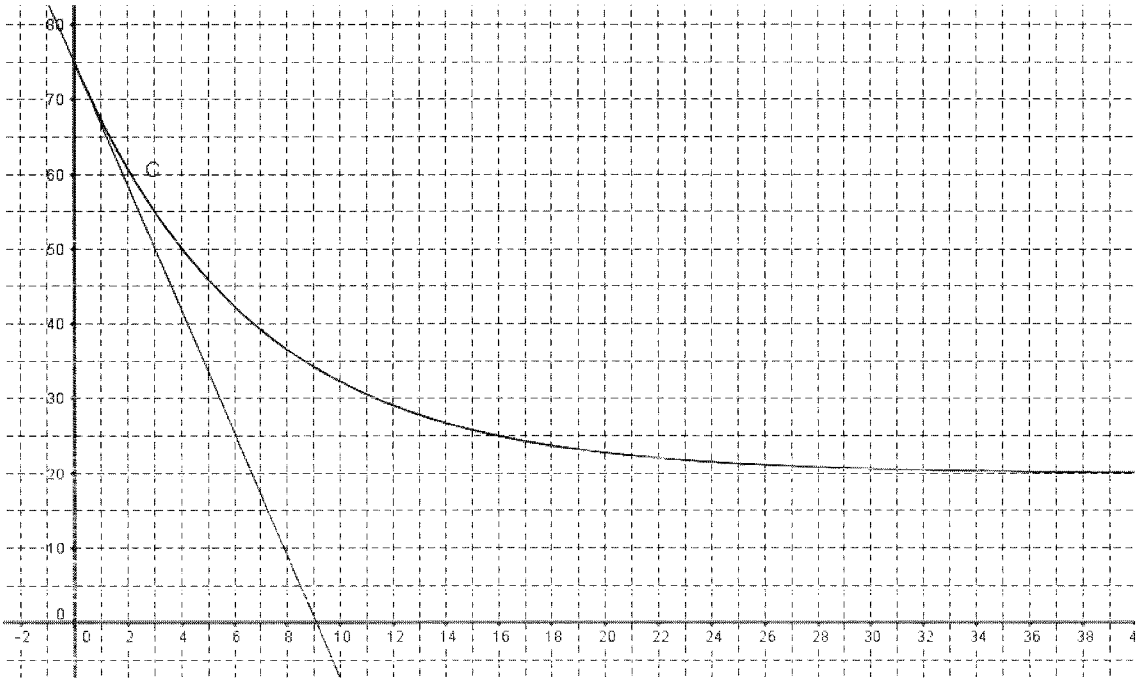
C. Exploitation du modèle précédent

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = 20 + 55\,e^{-0{,}15\,t}$.
On admet que f correspond à la température (en °C) de la monture en acétate en fonction du temps t (en min).

Un tableau de valeurs de $f(t)$, arrondies au dixième, est donné ci-dessous.

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$f(t) \approx$	75	46,0	32,3	25,8	22,7	21,3	20,6	20,3	20,1

Un logiciel fournit ci-dessous la courbe C représentant la fonction f dans un repère, ainsi que la tangente à C au point d'abscisse zéro.



1° Donner la température de la monture au bout de 15 minutes (au °C près).

2° a) Déterminer une expression de $f'(t)$.

b) En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3° a) Déterminer $\lim_{t \to +\infty} f(t)$.

b) En déduire que la courbe C admet une asymptote dont on donnera une équation.

4° Un logiciel de calcul formel fournit le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de zéro.

Calcul formel

1	PolynômeTaylor[20+55*exp(-0.15*t), t,0, 2] $\rightarrow 75 - \frac{33}{4} t + \frac{99}{160} t^2$

Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est correcte. Indiquer sur la copie la réponse correcte. On ne demande aucune justification.
La réponse correcte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse zéro est :

$y = 75$	$y = 75 - \frac{33}{4} t$	$y = 75 - \frac{33}{4} t + \frac{99}{160} t^2$	$y = 75 t - \frac{33}{4}$

5° L'objectif de cette question est de déterminer à partir de quel instant la température de la monture en acétate est inférieure à 24 °C.
On considère l'algorithme suivant.

Initialisation
t prend la valeur 15
Traitement
Tant que $f(t) > 24$
t prend la valeur $t + 1$
Fin de Tant que
Sortie
Afficher t

a) Faire tourner cet algorithme « à la main » en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

Étapes	Valeurs de t	Valeurs de $f(t)$	Condition $f(t) > 24$	Affichage
étape 1	15	$f(15) \approx 25{,}8$	VRAIE	aucun
étape 2	16	$f(16) \approx 25{,}0$	VRAIE	aucun
étape 3	17			

b) À partir de quel instant t_0, arrondi à la minute, la température de la monture est-elle inférieure à 24 °C ?

c) Proposer une modification de l'algorithme précédent afin qu'il permette d'obtenir une valeur approchée de t_0 arrondie au dixième.

EXERCICE 2 (10 points)

Une entreprise fabrique des lentilles de contact.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Dans cet exercice, les résultats approchés sont, sauf mention du contraire, à arrondir à 10^{-3}.

A. Probabilités conditionnelles

L'entreprise fabrique des lentilles de contact rigides et souples. Chaque jour l'entreprise produit 900 paires de lentilles rigides et 600 paires de lentilles souples.
On constate que, dans la production d'un jour donné, 1 % des paires de lentilles rigides sont défectueuses et que, de même, 2 % des paires de lentilles souples.
On prélève au hasard une paire de lentilles dans cette production.

On considère les événements suivants :

R : « la paire de lentilles est rigide » ;
S : « la paire de lentilles est souple » ;
D : « la paire de lentilles est défectueuse ».

1° **a)** Montrer que $P(R) = 0,6$.

b) Donner $P(S)$; $P_R(D)$ et $P_S(D)$.
(On rappelle que $P_A(B)$ désigne la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.)

2° Calculer $P(R \cap D)$. (On pourra s'aider en construisant un arbre de probabilités.)

3° Montrer que la probabilité que la paire de lentilles soit défectueuse est 0,014.

4° En déduire la probabilité que la paire de lentilles soit rigide sachant qu'elle est défectueuse.

B. Loi binomiale et loi normale

On considère que l'entreprise fabrique un stock important de paires de lentilles de contact.
On admet que 1,4 % des paires de lentilles de ce stock sont défectueuses.
On prélève au hasard n paires de lentilles dans ce stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de n paires de lentilles.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque prélèvement de ce type, associe le nombre de paires de lentilles défectueuses.

1° Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2° Dans cette question $n = 150$.

a) Calculer $P(X = 0)$.

b) En déduire la probabilité qu'au moins une paire de lentilles soit défectueuse.

3° Dans cette question $n = 1\,000$.
On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par la loi normale de moyenne 14 et d'écart type 3,715.

a) Justifier ces paramètres par le calcul.

b) Soit Y une variable aléatoire de loi normale de moyenne 14 et d'écart type 3,715. À l'aide de cette approximation, estimer la probabilité d'avoir au plus 10 paires de lentilles défectueuses, c'est-à-dire calculer $P(Y \leq 10{,}5)$.

C. Test d'hypothèse

On considère la production de lentilles de contact d'une journée. On souhaite construire un test d'hypothèse bilatéral au seuil de 5 % pour savoir si l'on peut considérer que la moyenne des diamètres des lentilles dans la production est 15 mm.
On désigne par Z la variable aléatoire qui, à chaque lentille prélevée dans la production, associe son diamètre en millimètres. On admet que Z suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type 0,4.
On note $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 lentilles prélevé dans la production, associe la moyenne des diamètres de ces 100 lentilles.

On admet que $\overline{Z}$ suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type $\dfrac{0{,}4}{\sqrt{100}} = 0{,}04$.

L'hypothèse nulle H_0 est : « $\mu = 15$ ».
L'hypothèse alternative H_1 est : « $\mu \neq 15$ ».
Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

1° On admet que sous l'hypothèse nulle H_0, la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart type 0,04. On souhaite déterminer, sous l'hypothèse nulle H_0, le réel positif h tel que $P(15 - h \leq \overline{Z} \leq 15 + h) = 0{,}95$.
Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est correcte. Indiquer sur la copie la réponse correcte. On ne demande aucune justification.
La réponse correcte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

La valeur approchée de h arrondie au centième est :

0,04	0,08	0,12	0,8

2° Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

3° On prélève un échantillon aléatoire de 100 lentilles dans la production. La moyenne des diamètres des 100 lentilles de cet échantillon est $\overline{z} = 14{,}94$ mm.
Quelle est la conclusion du test ?