BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

Session 2011

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

Matériel autorisé :

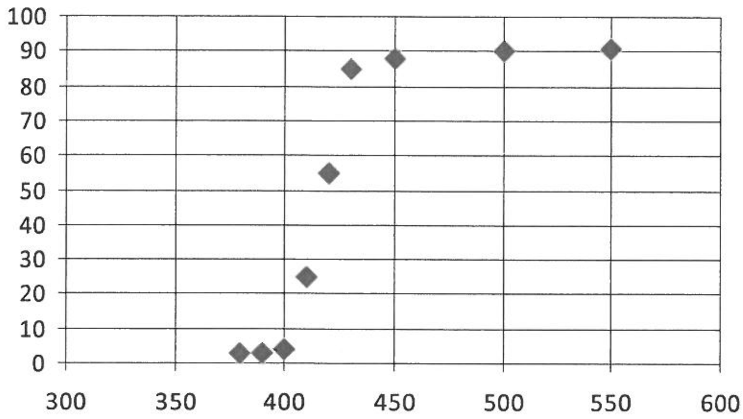
Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante. (Circulaire n° 99 – 186 du 16/11/1999.)
Tout autre matériel est interdit.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Un formulaire de 3 pages est joint au sujet.

EXERCICE 1 (9 points)

Les verres photochromiques s'assombrissent ou s'éclaircissent en fonction de la luminosité. On étudie dans cet exercice le coefficient de transmission d'un verre minéral photochromique en fonction de la longueur d'onde de la lumière.
Suite à une étude expérimentale, on a obtenu le nuage de points suivant, où x correspond à la longueur d'onde en nm, et y au coefficient de transmission, exprimé en pourcentage.



Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Ajustement affine

On s'intéresse tout d'abord à la phase de transition entre l'état sombre et l'état clair, correspondant aux données du tableau suivant.

Longueur d'onde x (en nm)	400	410	420	430
Coefficient de transmission y (en %)	4	25	55	85

1° Donner une équation de la droite de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$, où a est arrondi à 10^{-2} et b est arrondi à l'unité.

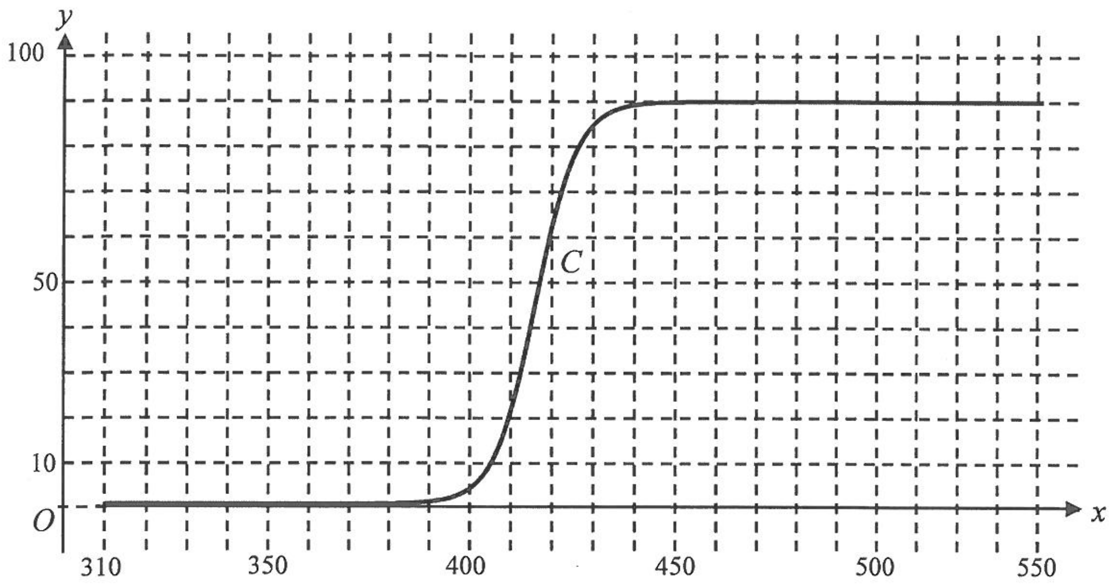
2° Utiliser l'équation précédente pour estimer le coefficient de transmission pour une longueur d'onde de 416 nm. Arrondir à l'unité.

B. Étude de fonctions et calcul intégral

Un modèle global de la situation expérimentale conduit à exprimer le coefficient de transmission, exprimé en pourcentage, en fonction de la longueur d'onde x, en nm, à l'aide de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 90 - \frac{89}{1 + e^{0,2\,(x-416)}}.$$

La courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée par le graphique suivant.



1° a) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$, $f'(x) = 89 \times 0{,}2 \dfrac{\mathrm{e}^{0{,}2\,(x-416)}}{\left(1+\mathrm{e}^{0{,}2(x-416)}\right)^2}$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.

2° *Les questions a), b) et c) suivantes sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Si le total est négatif, la note pour cette partie est ramenée à 0.

a)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 90$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$	$\lim\limits_{x \to 90} f(x) = +\infty$

b) La courbe C admet une asymptote dont une équation est :

$x = 90$	$y = 89$	$y = 90$

c) Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 416 est :

$y = -4{,}45x - 18\,923{,}55$	$y = 4{,}45x - 1\,805{,}7$	$y = 45{,}5x - 18\,923{,}55$

Le coefficient directeur de cette tangente correspond à la vitesse de transition.

3° a) Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$, $f(x) = 90 - 445 \times 0{,}2 \dfrac{\mathrm{e}^{-0{,}2(x-416)}}{1+\mathrm{e}^{-0{,}2(x-416)}}$.

b) Utiliser l'expression précédente pour donner une primitive de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

c) En déduire la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'aire, en unités d'aire, limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 380$ et $x = 550$.

Cette aire correspond à la quantité d'énergie absorbée par le verre durant la transition sombre/clair.

EXERCICE 2 (11 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une entreprise fabrique et distribue un produit de consommation courante en grande quantité.

A. Lois de probabilités

1° On considère un stock important de produits fabriqués par l'entreprise pendant un mois. On note E l'événement : « un produit prélevé au hasard dans ce stock est défectueux ». On suppose que $P(E) = 0{,}05$.
On prélève au hasard 40 produits dans le stock pour vérification. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 40 produits.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de produits de ce prélèvement qui sont défectueux.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b) Calculer la probabilité qu'aucun produit de ce prélèvement ne soit défectueux. Donner le résultat arrondi à 10^{-3}.

c) On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson. Donner le paramètre λ de cette loi de Poisson.

d) On note X_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ est la valeur obtenue au c).

– Donner, avec la précision permise par la table, la probabilité de l'événement « $X_1 \leq 4$ ».

– En déduire la probabilité qu'il y ait plus de quatre produits défectueux dans le prélèvement.

2° On prélève au hasard 400 produits dans le stock pour vérification. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 400 produits.
On considère la variable aléatoire Y, qui à tout prélèvement ainsi défini associe le nombre de produits défectueux de ce prélèvement, suit la loi binomiale $B(400\ ;\ 0{,}05)$.
On admet que la loi de Y peut être approchée par la loi normale de moyenne 20 et d'écart type 4,4.

a) Justifier les paramètres de cette loi normale.

b) On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale $N(20\ ;\ 4{,}4)$. En utilisant cette variable aléatoire, calculer la probabilité qu'il y ait au plus 30 produits défectueux dans le prélèvement, c'est-à-dire calculer $P(Z \leq 30{,}5)$. Donner le résultat arrondi à 10^{-3}.

B. Intervalle de confiance

On s'intéresse dans cette partie à la proportion inconnue p de produits dans le stock présentant une erreur d'étiquetage.
Pour cela, on prélève au hasard et avec remise 100 produits dans le stock.
Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon ainsi prélevé, associe la fréquence, dans cet échantillon, des produits présentant une erreur d'étiquetage. On suppose que F suit la loi normale de moyenne p inconnue et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$.
Pour l'échantillon prélevé, on constate que 6 produits présentent une erreur d'étiquetage.

1° Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.

2° Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p avec le coefficient de confiance 90 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-2}.

C. Probabilités conditionnelles et suites

L'entreprise décide de réaliser une campagne publicitaire dans une région donnée, pendant quelques semaines, afin d'assurer la promotion du produit de consommation courante qu'elle fabrique.
Avant le début de la campagne, la proportion de consommateurs du produit est de 25 %.
L'impact de campagne est le suivant :

- 97 % des consommateurs du produit une semaine donnée restent consommateurs la semaine suivante ;
- 15 % des non consommateurs du produit une semaine donnée deviennent consommateurs la semaine suivante.

On interroge au hasard un individu dans la région. Tous les individus ont la même probabilité d'être interrogés.
On note C_0 l'événement : « l'individu est consommateur du produit la semaine précédant le début de la campagne publicitaire » et p_0 la probabilité de l'événement C_0.
Pour tout entier naturel n non nul, on note C_n l'événement : « l'individu est consommateur du produit la semaine n » et p_n la probabilité de l'événement C_n.

1° Donner, à l'aide de l'énoncé :

a) la probabilité p_0 ;

b) pour tout entier naturel n, les probabilités conditionnelles $P_{C_n}(C_{n+1})$ et $P_{\overline{C_n}}(C_{n+1})$.

(On rappelle que $P_A(B)$ désigne la probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé.)

2° Justifier que la probabilité que l'individu interrogé soit consommateur du produit la semaine 1 est égale à 0,355.

3° Montrer que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}82\, p_n + 0{,}15$.

4° Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = p_n - \dfrac{5}{6}$.

a) Montrer que la suite de terme général u_n est une suite géométrique. Calculer u_n puis p_n en fonction de n.

b) Quelle est la limite de la suite (p_n) ?

Ce nombre représente la proportion maximale de consommateurs que peut envisager l'entreprise à l'issue de la campagne promotionnelle.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS OPTICIEN-LUNETIER

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$
e^t	e^t		
t^α $(\alpha \in \mathbb{C})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	Arc sin t	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$	Arc tan t	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$\cos t$	$-\sin t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Développements limités

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$

3. *PROBABILITES*

a) Loi binomiale $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

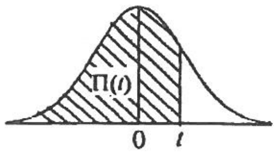
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$