BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

Session 2007

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

<u>Matériel autorisé</u> :

Calculatrice conformément à la circulaire N° 99 – 186 du 16/11/1999

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.
Un formulaire de 3 pages est joint au sujet.

Exercice 1 (11 points)

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Une entreprise effectue des contrôles pour détecter si un produit satisfait aux normes prévues. Le produit est conditionné en boîtes. Les contrôles montrent que la probabilité qu'une boîte prélevée au hasard dans la production soit défectueuse est égale à 0,006.
Soit n un entier naturel. On note X la variable aléatoire qui à chaque lot de n boîtes du produit tirées au hasard et avec remise dans la production associe le nombre de boîtes défectueuses dans ce lot.

1) Justifier que la variable aléatoire suit une loi binomiale. Donner l'espérance mathématique de X en fonction de n.

2) Déterminer, en fonction de n, la probabilité qu'il n'y ait aucune boîte défectueuse dans le lot.

3) Dans cette question, on prend $n = 500$.

   On admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de la variable aléatoire X par une loi de Poisson.

   a) Déterminer le paramètre de la loi de Poisson.

   b) On désigne par X_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ est la valeur obtenue au a). En utilisant cette loi de Poisson et la table du formulaire calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux boîtes défectueuses dans le lot.
   Donner le résultat approché arrondi à 10^{-2}.

4) Dans cette question, on prend $n = 10\,000$.

   On admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de la variable aléatoire X par une loi normale.

   a) Calculer la moyenne et l'écart type de cette loi normale.
   Donner, pour l'écart type, le résultat approché arrondi à 10^{-2}.

   b) On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 60 et d'écart type 7,72.
   Calculer à l'aide de la table du formulaire la probabilité $P(49{,}5 \leq Y \leq 70{,}5)$.

   c) En déduire la probabilité qu'il y ait, au sens large, entre 50 et 70 boîtes défectueuses dans le lot de 10 000 boîtes. Donner le résultat approché arrondi à 10^{-2}.

Partie B

L'entreprise organise une enquête de satisfaction auprès de ses clients.

Soir Z la variable aléatoire qui à tout échantillon de n fiches, prélevées au hasard et avec remise dans le fichier de la clientèle, associe le pourcentage de clients correspondants satisfaits par le produit.

On admet que Z suit la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$, où p est la proportion inconnue de clients satisfaits par le produit dans l'ensemble de la clientèle.

Un sondage auprès d'un échantillon aléatoire de 100 clients a montré que 85 d'entre eux étaient satisfaits.

1) Donner une estimation ponctuelle de p.

2) Donner une estimation de p par un intervalle de confiance avec le coefficient de confiance 95%. Arrondir les bornes à 10^{-2}.

3) Peut-on affirmer que p est compris dans cet intervalle de confiance ? Pourquoi ?

Exercice 2 (9 points)

Partie A

Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = -2x\ \mathrm{e}^{-x}$ où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ et y' sa fonction dérivée.

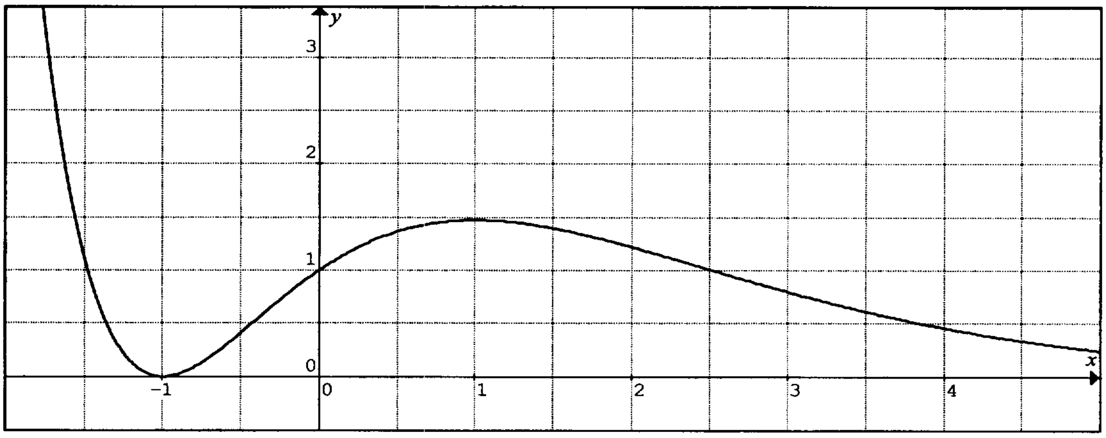
1) Déterminer les solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.
2) Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = -x^2\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).
3) Donner l'ensemble des solutions de (E).

Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}$.

1) Justifier que g est solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

2) Soit h la fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ représentée par la courbe ci-dessous :



On admet que la fonction h est une primitive de la fonction g sur $\mathbf{R}$.

En utilisant le graphique précédent donner une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$. On expliquera la démarche utilisée.

3) On se propose de calculer la valeur exacte de l'intégrale précédente.

   a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\int_0^1 x\ \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$.

   b) On sait que g est une solution particulière de l'équation différentielle (E) de la partie A, c'est-à-dire que, pour tout réel x on a :

$$g(x) = -g'(x) - 2x\ \mathrm{e}^{-x} .$$

   En déduire que $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 4\mathrm{e}^{-1} - 1$, puis la valeur exacte de l'aire, en cm², de la portion du plan comprise entre la courbe représentative de g (tracée à la question 5 de la partie B), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS OPTICIEN-LUNETIER

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a + b) = \exp a \times \exp b$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$
e^t	e^t	$\text{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
t^α $(\alpha \in \mathbb{C})$	$\alpha t^{\alpha-1}$		
$\sin t$	$\cos t$	$\text{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$\cos t$	$-\sin t$		

Opérations

$(u + v)' = u' + v'$

$(k u)' = k u'$

$(uv)' = u' v + u v'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' v - u v'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u) u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt$$

d) Développements limités

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$

3. *PROBABILITES*

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

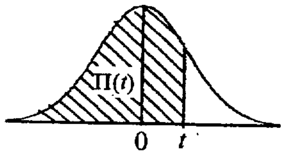
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) <u>Loi normale</u>

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3.8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$