BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

Session 2006

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

<u>**Matériel autorisé :**</u>
Calculatrice conformément à la circulaire N°99-186 du 16/11/1999

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 4 pages, numérotées de 1/4 à 4/4.
Un formulaire de 3 pages est joint au sujet.

EXERCICE 1 (10 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise est approvisionnée en « palets » pour la fabrication de lentilles.

Dans cet exercice, les résultats approchés seront arrondis à 10^{-2} sauf indication contraire de la partie *B*.

A. Loi binomiale et loi de Poisson

Dans un lot de ce type de palets, 2 % des palets ne sont pas conformes pour le rayon de courbure. On prélève au hasard 50 palets de ce lot pour vérification du rayon de courbure. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 palets.
On considère le variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 palets, associe le nombre de palets non conformes pour le rayon de courbure.

1° Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2° Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, un palet et un seul ne soit pas conforme pour le rayon de courbure.

3° Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un palet ne soit pas conforme pour le rayon de courbure.

4° On considère que la loi suivie par la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson.
Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

5° On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ est la valeur obtenue au 4°.
Calculer $P(Y = 1)$ et $P(Y \leqslant 1)$.

B. Evénements indépendants

Dans cette partie, on donnera les valeurs exactes des probabilités.

À l'issue de la fabrication, les lentilles peuvent présenter deux types de défauts :
- une puissance défectueuse,
- une épaisseur défectueuse.

On prélève une lentille au hasard dans la production d'une journée.
On note A l'événement : « la lentille présente une puissance défectueuse ».
On note B l'événement : « la lentille présente une épaisseur défectueuse ».
On admet que les probabilités des événements A et B sont $P(A) = 0{,}03$ et $P(B) = 0{,}02$ et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

1° Calculer la probabilité de l'événement E_1 : « la lentille prélevée présente les deux défauts ».

2° Calculer la probabilité de l'événement E_2 : « la lentille prélevée présente au moins un des deux défauts ».

3° Calculer la probabilité de l'événement E_3 : « la lentille prélevée ne présente aucun défaut ».

4° Calculer la probabilité de l'événement E_4 : « la lentille prélevée présente un seul des deux défauts ».

Puisque les événements A et B sont indépendants, on peut admettre que les événements $\overline{A}$ *et B sont indépendants et les événements A et* $\overline{B}$ *sont indépendants.*

C. Test d'hypothèse

Les palets utilisés pour la fabrication des lentilles doivent avoir un diamètre de 9,80 millimètres.
Dans cette partie, on se propose de contrôler la moyenne μ de l'ensemble des diamètres des palets d'une importante livraison reçue par l'entreprise.
On note Z la variable aléatoire qui, à chaque palet prélevé au hasard dans la livraison, associe son diamètre.
La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 0{,}13$.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 palets prélevé dans la livraison, associe la moyenne des diamètres de ces palets (la livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

L'hypothèse nulle est H_0 : « $\mu = 9{,}80$ ». Dans ce cas les palets de la livraison sont conformes pour le diamètre.
L'hypothèse alternative est H_1 : « $\mu \neq 9{,}80$ ».
Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

1° Justifier le fait que, sous l'hypothèse nulle H_0, $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 9,80 et d'écart type 0,013.

2° Sous l'hypothèse nulle, déterminer le nombre réel h positif tel que :
$P(9{,}80 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 9{,}80 + h) = 0{,}95$.

3° Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

4° On prélève un échantillon de 100 palets et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres est $\overline{z} = 9{,}79$.
Peut-on, au seuil de risque de 5 %, conclure que les palets de la livraison sont conformes pour le diamètre ?

EXERCICE 2 (10 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^x$,
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1° Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' - y = 0$.

2° Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\,e^x$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

B. Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)\,e^x$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$ où l'unité graphique est 2 cm.

1° a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
b) On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu au b).

2° a) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (x + 2)\,e^x$.
b) Établir le tableau de variation de f.

3° a) Écrire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
b) Construire sur la feuille de copie quadrillée T et C.

C. Calcul intégral

1° Justifier que la fonction f définie dans la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A. Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = f'(x) - e^x$.

2° En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

3° Soit a un nombre réel strictement inférieur à -2.
On note $I = \int_a^{-2} f(x)dx$

a) Démontrer que $I = -a\,e^a - 2\,e^{-2}$.
b) En déduire l'aire $\mathcal{A}$, en cm², de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -4$ et $x = -2$.
c) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de cette aire.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS OPTICIEN-LUNETIER

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$
e^t	e^t		
t^α $(\alpha \in \mathbb{C})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\text{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$	$\text{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$\cos t$	$-\sin t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = k u'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$\left(e^u\right)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Développements limités

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$

3. PROBABILITES

a) Loi binomiale

$P(X = k) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$ où $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

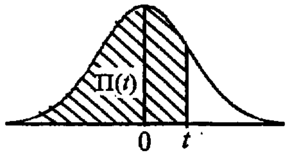
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$