BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHEMATIQUES

Durée : 2 H

Coefficient : 2

<u>Matériel autorisé :</u>
Calculatrice conformément à la circulaire N°99-186 du 16/11/1999

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 4 pages, numérotées de 1/4 à 4/4.
Le formulaire comporte 3 pages.

Les calculatrices sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviennent dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (9 points)
L'étude des fiches de 500 patients d'un cabinet d'ophtalmologie a permis d'établir le tableau suivant.

Tranche d'âge	moins de 25 ans		de 25 ans à 45 ans			plus de 45 ans		
Nombre de visites annuelles	1	2	1	2	3	1	2	3
Effectifs	25	15	90	80	40	132	86	32

Par exemple, 86 personnes de plus de 45 ans sont venues au cabinet deux fois dans l'année.

1° On tire une fiche au hasard dans l'ensemble des fiches des 500 patients.
On considère que tous les tirages sont équiprobables. On note A l'événement : "le patient a moins de 25 ans" et B l'événement : "le patient vient deux fois par an au cabinet".

a) Calculer la probabilité de chacun des événements A, B et $A \cap B$.

b) Déterminer la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé. Arrondir cette probabilité à 10^{-2}.

2° Soit X la variable aléatoire qui, à chaque fiche tirée au hasard dans le fichier, associe le nombre de visites annuelles inscrites sur cette fiche.

a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

3° On prélève dix fiches au hasard et avec remise dans le fichier. On appelle Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 10 fiches, associe le nombre de fiches de patients de moins de 25 ans.

a) Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y.

c) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 2 fiches exactement correspondent à des patients de moins de 25 ans. Arrondir à 10^{-2}.

4° On prélève cent fiches au hasard et avec remise dans le fichier. On considère la variable aléatoire Z qui, à chaque prélèvement de cent fiches, associe le nombre de fiches de patients de moins de 25 ans.
On admet que Z suit approximativement la loi de Poisson de paramètre 8.

a) Déterminer, avec la précision permise par la table, la probabilité de l'événement E : "cinq fiches au plus correspondent à des patients de moins de 25 ans".

b) On considère un entier naturel n et l'événement F : "n patients au plus ont moins de 25 ans". Déterminer la valeur minimale n_0 de l'entier n telle que la probabilité de F soit supérieure à 0,5.

EXERCICE 2 (11 points)
Une étude statistique effectuée sur une pièce utilisée dans la fabrication des lunettes a donné les résultats suivants où :
x désigne le prix unitaire en euros,
y désigne la demande (la quantité demandée par les consommateurs), en milliers d'unités,
z désigne l'offre (la quantité offerte sur le marché par les producteurs), en milliers d'unités.

x	0,5	1	1,9	2,1	2,4	2,8	3,2	3,5
y	10,5	9	6,9	6,5	5,9	5,3	4,7	4,3
z	2	2,4	2,8	2,9	3	3,1	3,2	3,3

A. Etude de fonctions f et g, définies sur [0, 5]
et tracé de leurs courbes représentatives

1° On appelle f la fonction demande définie sur [0, 5] par $f(x) = y$.
La demande, en milliers d'unités, pour un prix de x euros est donc $f(x)$.
On admet que, pour tout x de [0, 5], $f(x) = e^{-0,3x+2,5}$.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ où l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

a) Etudier les variations de f sur [0, 5].

b) Construire la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.
(On pourra utiliser le tableau de valeurs ci-dessus).

2° a) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel on fera figurer des valeurs approchées arrondies à 10^{-2}.

x	0,5	1	1,9	2,1	2,4	2,8	3,2	3,5
z	2	2,4	2,8	2,9	3	3,1	3,2	3,3
$Z = e^z$	7,39							

b) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique de variables x et Z. Arrondir à 10^{-3}.

c) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de Z en x sous la forme $Z = ax + b$ où a et b sont à arrondir à 10^{-1}.

d) Déduire du c) une expression de z en fonction de x.

3° On appelle g la fonction offre définie sur [0, 5].
L'offre, en milliers d'unités, pour un prix de x euros est donc $g(x)$.
On admet que, pour tout x de [0, 5], $g(x) = \ln(6,4x + 4,4)$.

a) Etudier les variations de g sur [0, 5].

b) Construire la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de la fonction g dans le même repère que la courbe $\mathcal{C}_f$.
(On pourra utiliser le tableau de valeurs figurant au début de cet exercice, en remarquant que $z = g(x)$.)

B. Détermination du prix d'équilibre

Le prix d'équilibre est le prix de vente x_0 pour lequel l'offre est égale à la demande, c'est à dire $f(x_0) = g(x_0)$ ou $f(x_0) - g(x_0) = 0$.
On considère la fonction h définie sur $[0, 5]$ par
$h(x) = e^{-0,3x + 2,5} - \ln(6,4x + 4,4)$.

1° Vérifier que, pour tout x de $[0, 5]$, $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.

2° Déduire du 1°a) et du 3°a) de la partie *A* que, pour tout x de $[0, 5]$, $h'(x) < 0$.
En déduire le sens de variation de h sur $[0, 5]$.

3° a) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique, notée x_0, dans $[4 ; 4,5]$.
b) Déterminer un encadrement d'amplitude 0,1 de x_0.

4° Expliquer par une phrase comment on peut vérifier sur la figure de la partie *A* le résultat obtenu au 3° de la partie *B*.

5° Dans cette question, pour simplifier, on prend pour prix d'équilibre $x_0 = 4$.
a) Calculer $f(x_0)$. Arrondir à 10^{-2}.
b) En déduire la quantité de pièces échangées sur le marché.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS OPTICIEN-LUNETIER

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$
e^t	e^t		
t^α $(\alpha \in \mathbb{C})$	$\alpha t^{\alpha - 1}$	$\text{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$	$\text{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$\cos t$	$-\sin t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$\left(e^u\right)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha - 1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$ *:*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Développements limités

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t) \qquad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$

3. *PROBABILITES*

a) Loi binomiale $P(X = k) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$ où $\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

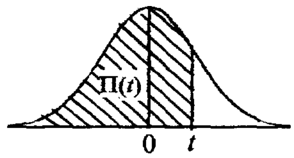
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$